Die chromatische Tonleiter – Mathematik und Physik

Peil, Udo

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 2012 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.54-65

J. Cramer Verlag, Braunschweig

Die chromatische Tonleiter – Mathematik und Physik*

Udo Peil

Försterkamp 9, D-38302 Wolfenbüttel

1. Einleitung

Wieso spielen wir auf der uns bestens bekannten diatonischen oder auch chromatischen Tonleiter? Gibt es hierfür Gründe, oder ist die Tonleiter eher zufällig entstanden und hat sich bewährt? Diesen Fragen soll im Folgenden nachgegangen werden. Dabei wird eine physikalische und dann auch eine mathematische Betrachtung vorgenommen.

Ein hörbarer Ton erklingt immer dann, wenn ein Schwingungserzeuger häufiger als 20mal pro Sekunde, d.h. mit mindestens 20 Hz schwingt. Schwingungserzeuger können dabei sein: Saiten eines Streichinstrumentes, die Luftsäule eines Blasinstrumentes oder eine schwingende Zunge, wie bei der Mundharmonika oder dem Akkordeon.

Eine schwingende Saite schwingt zwischen zwei Grenzlage hin und her. Die Frequenz der Schwingung wird bestimmt durch die Saitenvorspannung S, die Saitenmasse m und die freischwingenden Länge der Seite l. Es gilt:

$$f = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{m}} \quad [Hz] \tag{1}$$

Bei einer Saite mit vorgegebener Vorspannung S und Masse m hängt die Frequenz also nur noch von der Saitenlänge ab. Die Saite schwingt in sog. Naturtönen, gelegentlich auch Obertöne genannt. Gleichung (1) macht deutlich, dass 1/n-tel der freien Saitenlänge zu einer n-fachen Frequenz führt. In Bild 1 sind die Verhältnisse dargestellt.

Die Frequenzverhältnisse zwischen den verschiedenen Saitenschwingungen sind die Intervalle unseres diatonischen Tonsystems:

$f_2 / f_1 = 2/1$ ist eine Oktave
$f_3 / f_2 = 3/2$ ist eine Ouinte
$f_4 / f_3 = 4/3$ ist eine Ouarte

* Der Vortrag wurde am 09.03.2012 vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.

$f_5 / f_4 = 5/4$ ist eine gr. Terz
$f_6 / f_5 = 5/4$ ist eine kl. Terz

usw. Die hierbei entstehenden Intervalle nennt man auch Naturtonreihe. In Bild 2 ist sie auch im Notensystem dargestellt, hier allerdings nicht auf eine Grundfrequenz des c von 131 Hz sondern auf 100 Hz bezogen, damit die Abhängigkeiten sofort deutlich werden. Das c wird also in Bild 2 fälschlicherweise mit 100 Hz statt 131 Hz angegeben.

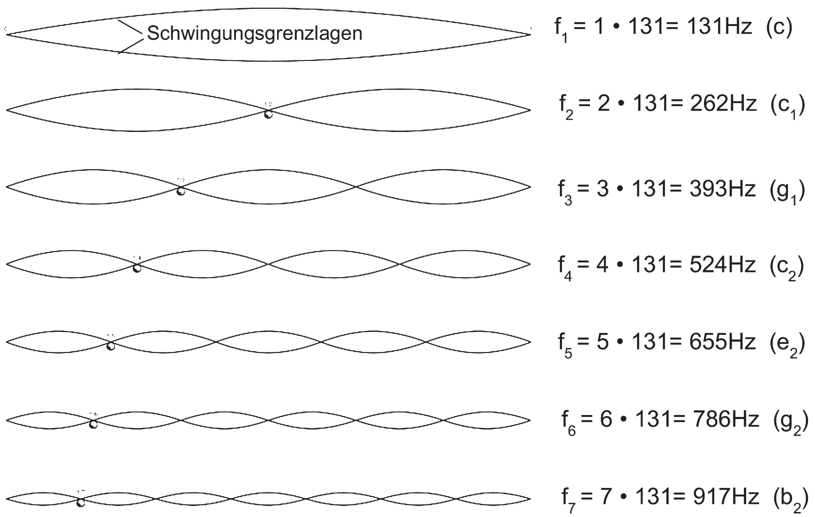


Bild 1: Naturtöne von Saiten und deren Frequenzen.

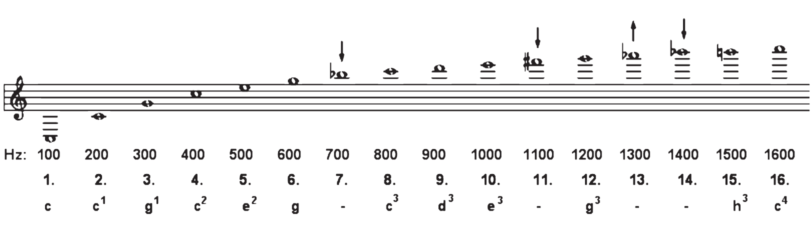


Bild 2: Naturtonreihe.

Man erkennt deutlich, dass die Frequenzen der Naturtöne mit gleichmäßigen Abständen ansteigen. Aus diesen Naturtönen setzt sich der Klang einer Saite zusammen. Je mehr Naturtöne mitschwingen, desto heller und schärfer wird der

Klang empfunden. Nur wenn eine Saite genau in der Form eines Naturtones erregt wird, z.B. durch ungleich starkes Anzupfen entsprechend der in Bild 1 dargestellten Amplituden, erklingt nur dieser eine Naturton. Wenn anders angezupft wird, und das ist die Regel, erklingen viele Obertöne, ggf. sogar alle. Was für das Anzupfen gesagt wurde, gilt in gleicher Weise auch für das Anstreichen z.B. einer Geige. Wenn der Geigenbogen an einer beliebigen Stelle der Saite angesetzt wird, werden nahezu alle Obertöne angeregt. In Bild 3 ist die Messung der beteiligten Obertöne einer Geigensaite dargestellt. Man erkennt deutlich den gleichmäßigen Abstand der Obertöne und den unterschiedlichen Beteiligungsbeitrag der einzelnen Obertöne. Die Amplitude des Grundtons ist kleiner als die der Obertöne. Der Ton klingt also relativ scharf. Ein Grund dafür, dass sich die Geige im Klang immer durchsetzt [Peil, 2009]

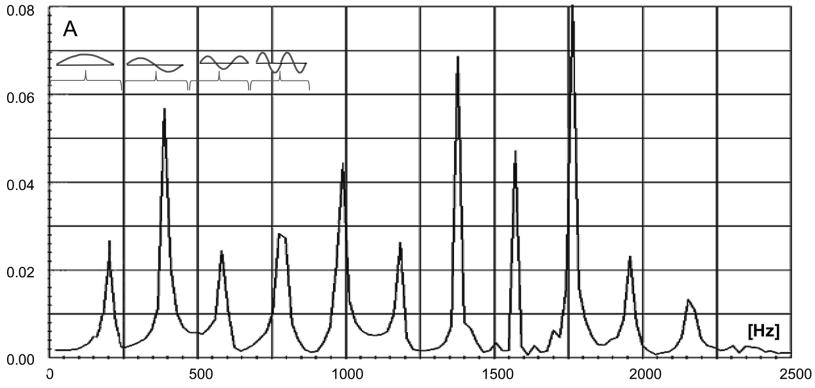
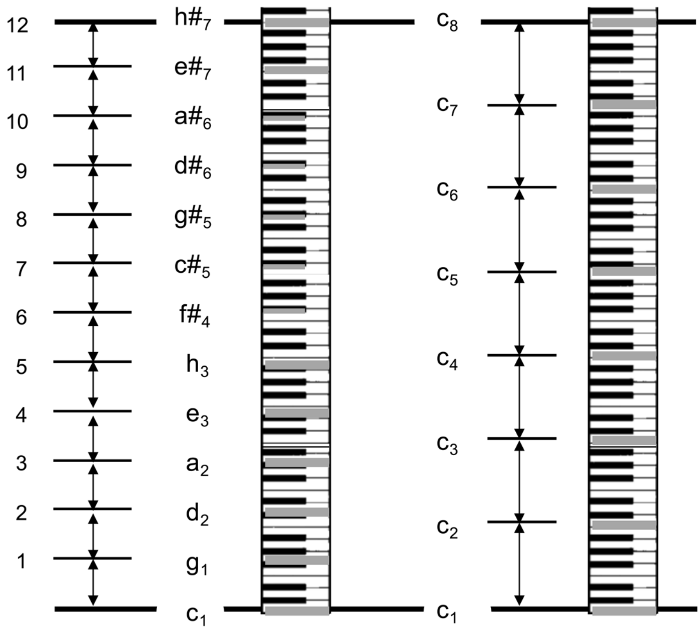


Bild 3: Gemessenes Obertonspektrum einer Geigensaite.

Auf dieser Eigenart der gleichmäßigen Obertonabstände baut die Tonleiter auf. Pythagoras hat ca. 500 v.C. die erste Tonleiter entwickelt. Hierbei ging er nur von den beiden Frequenzabständen 3:2 (Quinte) und 2:1 (Oktave) aus.

Beginnend bei einem Grundton wurde zu diesem die Quinte bestimmt, d.h. die Frequenz steigt um den Faktor 3:2 = 1,5. Zu dieser Quinte wurde wiederum deren Quinte bestimmt, indem die neue Frequenz ebenfalls wieder mit dem Faktor 3:2 = 1,5 multipliziert wird. Bezogen auf den Grundton hat die neue Quinte nunmehr die Frequenz $f_1 \bullet 3/2*3/2 = f1 \bullet (3/2)^2$. Wenn dieser Prozess fortgesetzt wird, erreicht man nach der 12. Quinte den Ton his (vgl. Bild 4). Dieser entspricht in unserem Tonssystem dem Ton c, der allerdings 7 Oktaven über dem Ausgangston liegt. Musikalisch gesprochen, sind wir einmal rechtsherum durch den gesamten Quintenzirkel gewandert. Die Frequenz des Tons His ergibt sich dann in Bezug zu dem Grundton zu $f_{His}=f_1 \bullet (3/2)^{12}$. Zum gleichen Ton kommen wir, wenn wir 7 Oktaven aufeinander stapeln: $f_{c7}=f_1 \bullet 2^7$ (bei der Oktave wächst die Frequenz jeweils um den Faktor 2), vgl. Bild 4. Zwischen beiden Zieltönen klafft eine Differenz von ca. 1,4%. Ein Unterschied der deutlich hörbar ist. Der Quintenzirkel schließt sich nicht exakt.



$$h\#_7 = 131\,Hz \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 16996\ Hz \qquad c_8 = h\#_7 = 131\,Hz \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{7} = 16768\ Hz$$

Bild 4: Darstellung an der Klaviatur.

Laufen wir durch den ganzen Quintenzirkel und beachten, dass beim Überqueren der Oktave der Faktor ½ zu multiplizieren ist, um den Ton wieder in den Oktavraum zu verschieben, ergibt sich:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{531441}{524288} = 1{,}0136 \approx 1{,}04$$

Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen exakt geschlossen, hätte sich die Zahl 1 ergeben. Man nennt den Fehler das „Pythagoreische Komma“.

Das Nichtschließen des Quintenzirkels, d.h. das pythagoreische Komma ist natürlich ein höchst misslicher Zustand, der den Instrumentenbauern, insbesondere den Orgelbauern große Probleme bereitet hat. Es wurde unterschiedliche Korrekturstimmungen entwickelt, bei denen der Fehler von 1,4% unterschiedlich „verschmiert“ wurde. Bekannt ist die sog. Werckmeister-Stimmung. geschaffen vom Orgelbauer Andreas Werckmeister aus Halberstadt. Er hat mehrere Stimmungen entwickelt. Eine war die sog. wohltemperierte Stimmung, für die Johann Sebastian Bach Kompositionen durch alle Tonarten geschrieben hat (Das wohltemperierte Klavier), um zu zeigen, dass alle Tonarten bei dieser Stimmung gut klingen. Wenn man diesen Fehlerausgleich nicht vornimmt, klingen Tonarten mit vielen Vorzeichen furchtbar verstimmt. Heute spielen wir mit der sog. gleichschwebenden Stimmung, bei der der Fehler gleichmäßig auf alle Intervalle verschmiert wird. Kein Intervall stimmt also richtig hierbei, aber wir haben uns daran gewöhnt. Die wohltemperierte Stimmung ist schwierig zu stimmen, erst 1917 gab es eine Anleitung zum Klavierstimmen.

Zur klassischen Tonleiter kommt man also dann, wenn man wenn beim Quintenstapeln die Oktave überschritten wird, jeweils um eine Oktave nach unten geht, d.h. die Frequenz durch 2 teilt.

Bei aller Musik geht es in der Regel immer um das Zusammenklingen mehrerer Stimmen. In Bild 5 ist dargestellt, wie sich die Obertöne, die zu jedem Ton gehören, überlagern, wenn ein Grundton zusammen mit seiner Quinte gespielt wird, [Helmholtz, 1913].

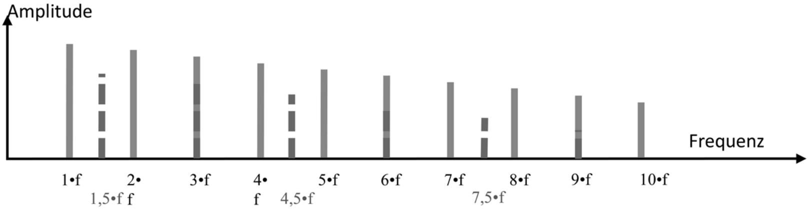


Bild 5: Grundton und Quinte jeweils mit Obertönen.

Man erkennt, dass viele Obertöne zusammenfallen, einige sind relativ weit voneinander entfernt. Dies ist im Zusammenklang günstig, wie wir gleich sehen werden.

Beim Zusammenklang von Grundton und großer Terz ist die Situation nicht mehr ganz so günstig, vgl. Bild 6:

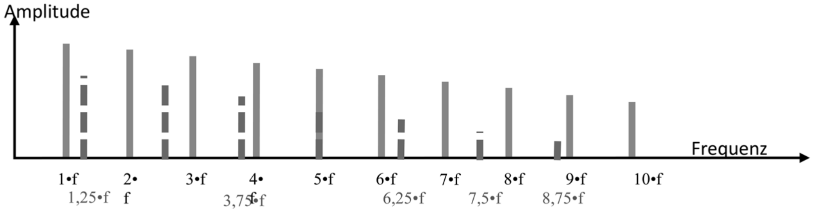


Bild 6: Grundton und große Terz jeweils mit Obertönen.

Man erkennt, dass hierbei die Obertöne deutlich näher zueinander liegen, was zu einem nicht so schönen Zusammenklang führt, wie ihn die Quinte bietet. Aus diesem Grunde war die Terz auch im Mittelalter zunächst als ein unreines Intervall angesehen und wurde tunlichst vermieden.

Bei der Empfindung von Konsonanz und Dissonanz spielt der Tonabstand der Töne und aller ihrer Obertöne eine wichtige Rolle. In Bild 7 ist dies dargestellt [Pierce, 1999]:

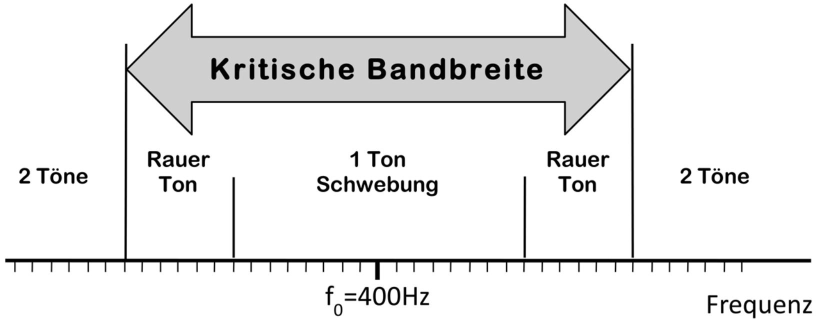


Bild 7: Kritische Bandbreite beim Erklingen benachbarter Töne.

Sehr enge Tonabstände führen zu einer Schwebung, die Amplitude schwankt periodisch, der Ton „wabbert". Die Schwebung wird z.B. von Orgelbauern als Hilfe zum Stimmen verwendet, wenn die Schwebung zwischen zwei Tönen verschwunden ist, der Ton also nicht mehr „wabbert", sind die beiden Pfeifen exakt gestimmt. Wird der Tonabstand größer, entsteht ein rauher Ton, der als sehr unangenehm wahrgenommen wird. Alte Telefonklingeln nutzten diesen Effekt aus, um Aufmerksamkeit zu erregen. Erst wenn ein hinreichend großer Frequenzabstand vorliegt, ist unser Ohr in der Lage, die beiden Töne getrennt wahrzunehmen, der Zusammenklang ist angenehm. Der Frequenzabstand innerhalb dessen die Klangwahrnehmung als unangenehm zu bezeichnen ist, wird kritische Bandbreite genannt. Töne innerhalb der kritische Bandbreite erzeugen also Unwohlseinsgefühle beim Hörer.

Die kritische Bandbreite ist nun kein fester Wert, sondern auch selbst von der Frequenz des Ausgangstones abhängig. Bild 8 zeigt die Abhängigkeiten [Pierce, 1999].

Man entnimmt dem Diagramm, dass bei tiefen Tönen auch die kleine Terz unterhalb, d.h. innerhalb der kritischen Bandbreite liegt, Ganzton und Halbton ohnehin. Dieser Effekt ist leicht überprüfbar wenn auf dem Klavier in der Basslage eine Terz angeschlagen wird. Die Terz kling „brummelig" und unschön. Ein Grund dafür, dass Komponisten solche Kombinationen vermieden haben. Die linke Hand wird i.a. immer mit größeren Tonabständen bedacht.

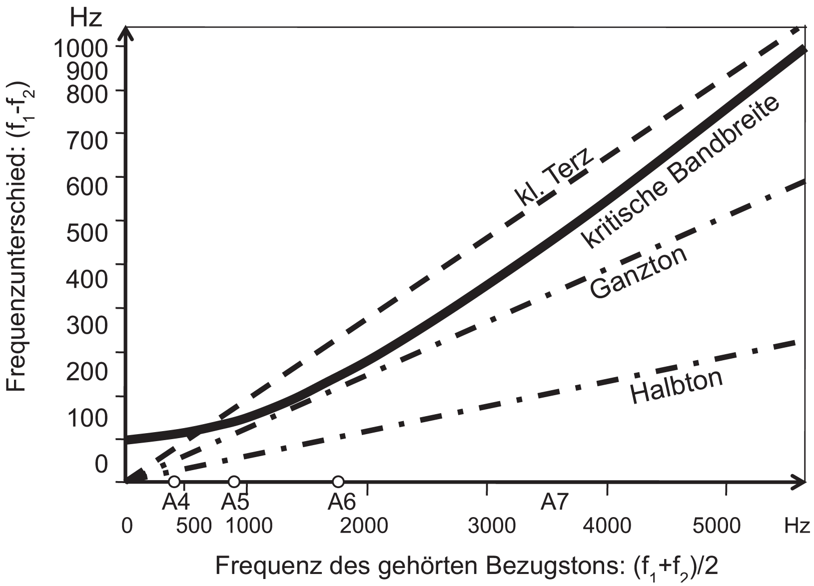


Bild 8: Abhängigkeit der krit. Bandbreite von der Frequenz des Bezugstones.

Wenn man nun Töne zusammen spielt und für jeden einzelnen Grund- und Oberton prüft, ob Töne innerhalb der kritischen Bandbreite liegen, ergibt sich ein Kriterium für einen harmonischen Klang: Je weniger Grund- und Obertöne bei der Kombination innerhalb der kritischen Bandbreite liegen, desto harmonischer ist der Klang. Im Folgenden werden die Töne systematisch miteinander kombiniert, d.h. ausgehend von einem Grundton wird ein zweiter Ton betrachtet, der dann langsam schrittweise seinen Frequenzabstand zum Grundton erhöht. Man kann dies für eine endliche Zahl von Obertönen in einer Exceltabelle durchführen, indem ein Ton mit seiner Obertonreihe vorgegeben wird und ein weiterer Ton mit variablem Frequenzabstand dazu betrachtet wird. Es werden die entstehenden Tonkombinationen betrachtet und die Töne gezählt, die innerhalb der kritischen Bandbreite liegen. Die Anzahl der Töne, die in die kritische Bandbreite fallen, wird als Maßstab für die Disharmonie verwendet. Je höher die Anzahl, desto unharmonischer diese Tonkombination. In Bild 9 ist das Ergebnis dargestellt [Pierce, 1999].

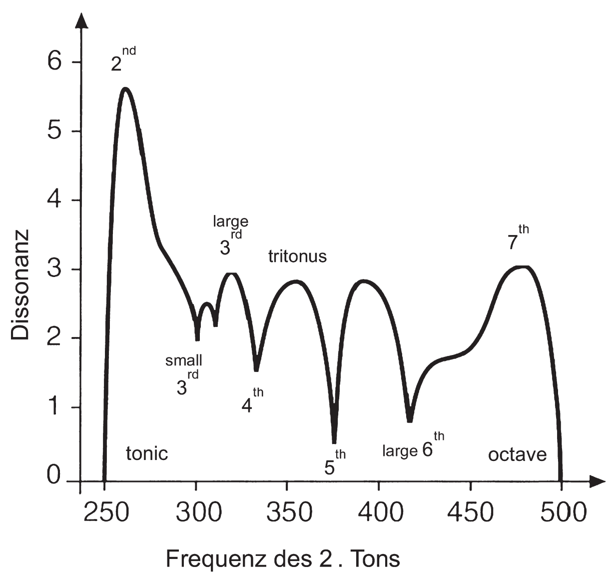


Bild 9: Dissonanz bei zwei Tönen unterschiedlichen Tonabstands.

Man erkennt, dass sowohl die Tonika und die Oktave perfekt zusammenklingen (Dissonanz = 0), was nicht verwundert, da bei gleichen Tönen auch die Obertöne exakt passen, bei Oktaven liegt der Grundton des zweiten Tones exakt auf dem ersten Oberton des unteren Tones, alle anderen Obertöne sind zwangsläufig deckungsgleich.

Man erkennt weiterhin, dass die Disharmonie bei den Tönen unserer diatonischen Tonleiter ein Minimum einnimmt, lediglich die Sekunde und die Septime zeigen große Disharmonien, was bekannt ist.

Da Flöten nur wenige Obertöne anregen (daher der etwas gleichförmige, sinusförmige Klang), entstehen auch bei Septimen und Sekunden weniger Konflikte mit den Obertönen (was nicht klingt, kann nicht den Zusammenklang stören). Septime oder Sekunden klingen also bei Flöten deutlich angenehmer als z.B. bei Oboen, die ein großes Obertonspektrum haben. Klarinetten haben theoretisch nur die ungraden Obertöne 1,3,5,7,... obwohl sich in Praxi zumindest die oberen geraden Obertöne einstellen. Auch hier gilt die Regel, was nicht obertonmäßig klingt, kann nicht stören. Ein Grund sicherlich für den Erfolg der Arrangements von Glenn Miller mit einer Klarinette im Saxophonsatz.

Unsere diatonische Tonleiter: C D E F G A H C verwendet ganz bestimmte Intervalle aus den zwölf Tönen einer Oktave.

Bildet man alle hiermit möglichen **Tonkombinationen** so erhält man:

- 2 kleine Sekunden (gr. Septimen)
- 5 große Sekunden (kl. Septimen) 8 dissonante Intervalle
- 1 Tritonus
- 4 kleine Terzen (gr. Sexten)
- 3 große Terzen (kl. Sexten) 13 konsonante Intervalle
- 6 Quarten (Quinten)

Bei allen anderen Auswahltönen aus den 12 ist dies deutlich ungünstiger!

Dies ist ein wesentlicher Grund dafür, dass sich die diatonische Tonleiter zusammen mit der chromatischen durchgesetzt hat.

Der konsonante Zusammenklang basiert letztlich auf dem ganzzahligen Frequenzverhältnis der Obertöne. Wenn dies nicht mehr gegeben ist, klingt es sehr unschön. Deshalb gibt es im Orchester auch nur Streich- und Blasinstrumente, die ein exakt gleiches gleiches Obertonverhalten zeigen. Bei anderen Instrumenten, wie z.B. der Glocke ist das ganzzahlige Obertonverhältnis nicht mehr gegeben, so dass viel mehr Reibungen auftreten, da die Obertöne nahezu zwangsweise innerhalb der kritischen Bandbreite liegen. Ein Grund dafür, dass zweistimmige Glockenspiele musikalisch gesehen oft nur schwer zu ertragen sind. Bei einstimmiger Musik spielt all dies keine Rolle, da kein Zusammenklang vorhanden ist. Bei Glockenspielen gibt es allerdings durch das Nachklingen der Glocken oft dennoch Überlagerungen, die uns die Ohren klingen lassen.

Mathematischer Versuch einer Annäherung:

Über alle Tonlagen hinweg hat das geschulte Ohr ein sicheres Empfinden für die Quinte und die Oktave, diese sollten deshalb möglichst stimmen. Es stellt sich also die Frage: Wieviel Töne muss man in eine Oktave einschalten, damit die Quinte möglichst genau getroffen wird [Hartfeldt, 2002]? Ziel ist es also nach m Quintensprüngen aufwärts und n Oktavsprüngen abwärts wieder zur Grundfrequenz zu gelangen. Mathematisch formuliert bedeutet dies; Gesucht sind m und n so, dass

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^m \cdot 1^n}{2^m \cdot 2^n} = \frac{3^m}{2^{m+n}} = 1$$

triton
us

Exakt lässt sich die Bedingung nicht erfüllen, weil eine 3er Potenz niemals gerade ist. Wir suchen also eine möglichst gute Näherung.

$$\begin{aligned}
&3^m = 2^{m+n} \\
&m \cdot \log 3 = (m+n) \cdot \log 2 \\
&\mathit{oder} \\
&\frac{m+n}{m} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} = \frac{4771}{3010}
\end{aligned} \qquad (3)$$

Wir suchen eine Näherung mit geraden Zahlen für m und n, Es gibt kein Klavier mit einer gebrochenen Anzahl (z.B. 87,667) an Tasten. Um zu einer Näherung zu kommen, wird das Ganze als Kettenbruch entwickelt [Hartfeldt, 2002]:

$$\frac{4771}{3010} = 1 + \frac{1761}{3010} = 1 + \frac{1}{\frac{3010}{1761}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1249}{1761}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots\ldots}}}}}$$

Wenn der entstehende Bruch einen kleineren Zähler als Nenner hat, es also nicht mehr festgestellt werden kann, wie oft der Nenner in den Zähler passt, wird der Bruch mit Vertauschung von Zähler und Nenner in seinen Nenner geschoben.

Die verschiedenen Stufen der Kettenbruchentwicklung liefern folgende Näherungswerte:

$$
\begin{array}{lll}
1. & 1 & = 1 \\
2. & 1+\frac{1}{1} & = \frac{2}{1} \\
3. & 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} & = \frac{3}{2} \\
4. & 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} & = \frac{8}{5} \\
5. & 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} & = \frac{19}{12} \\
6. & 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}} & = \frac{65}{41}
\end{array}
\qquad (4)
$$

Die 5. Näherungsstufe liefert: $$\frac{m+n}{m} \approx \frac{19}{12}, \; also \;\; m = 12 \qquad (5)$$

Quintensprünge, gleich Halbtöne innerhalb einer Oktave. Teilt man die Oktave also in 12 Halbton-Intervalle, so ist die Bedingung, dass Quinten und Oktaven gut getroffen werden näherungsweise (gut) erfüllt. 12 Ouintensprünge ergeben letztlich 12 (Halb)töne, die in die Oktave eingeschachtelt werden müssen. Dazu gehören 19-12 = 7 Oktavsprünge. All das ist in der Musizierpraxis beherrschbar. Bei der 4. Näherung würden nur 5 Zwischentöne entstehen, das sind viel zu wenig. Bei der 6. Stufe hätte man 41 Töne für eine Oktave, ein für die Musizierpraxis sehr unhandlicher Wert.

Zum gleichen Ergebnis der 12 Quint- und 7 Oktavsprünge sind wir auch vorher bei der Herleitung der pythagoreischen Tonleiter gekommen.

5. Zusammenfassung

Die Musik die wir heute in unterschiedlichsten Stilrichtungen hören, basiert letzlich auf Abhängigkeiten, die physikalischer und mathematischer Natur sind. Wesentliche Voraussetzung für das harmonische Zusammenspiel ist die gleichmäßige Obertonreihe mit Obertönen, die durch ganze Zahlen beschrieben werden können. Beim Anschlagen oder Anstreichen einer Saite bzw. beim Anblasen eines Tones entstehen neben dem Grundton, der die Tonhöhe ausmacht, auch eine zumindest theoretisch unbegrenzte Zahl von Obertönen, die im Ganzzahlabstand aufgereiht werden, die den sog. Klangcharakter des Tones ausmachen. Es wird gezeigt, dass unsere diatonische und chromatische Tonleiter zu einem Minimum an Dissonanzen von zwei gleichzeitig klingenden Tönen führt.

Literatur

SPITZER, M., 2002: Musik im Kopf. Schattauer Verlag, Stuttgart 2002

HARTFELDT, C., W. EID & H. HENNING, 2002: Mathematik in der Welt der Töne. Magdeburg, den 10. Oktober 2002. In: http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/musik.pdf

HELMHOLTZ, HV., 1913: Die Lehre von den Tonempfindungenals pysikalische Grundlage für die Theorie der Musik. 6. Auflage, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1913.

PEIL, U., 2009: Wind and Music. In: European and African Conference on Wind Engineering, Firenze University Press, 2009, K45–K65.

PIERCE, J.R., 1999: The nature of musical sound. In: Deutsch (Ed) The psychology of Muisc. 2nd ed. San Diego, Academic press, p. 1–23.